19. 大数据专业群教师（大数据技术方向）1 岗位试讲内容

注意事项：

1. 每位考生试讲时间为 8 分钟；

2. 试讲统一采用PPT讲授方式（自备U盘，如因U盘打不开课件，责任自负，U盘不能用考生姓名命名）；

3. 试讲的考生在候考室抽签结束后在教案封面填写抽签号提交教案打印件（一式 7 份）给工作人员。教案不能透露任何个人信息，考生不得穿制服、单位工作服或有明显文字或图案标识的服装参加面试，凡透露个人信息的考生，扣减面试成绩的 5%—20%，情节严重的，取消面试成绩。

教学内容： 第四章 不定积分

第二节 不定积分的计算

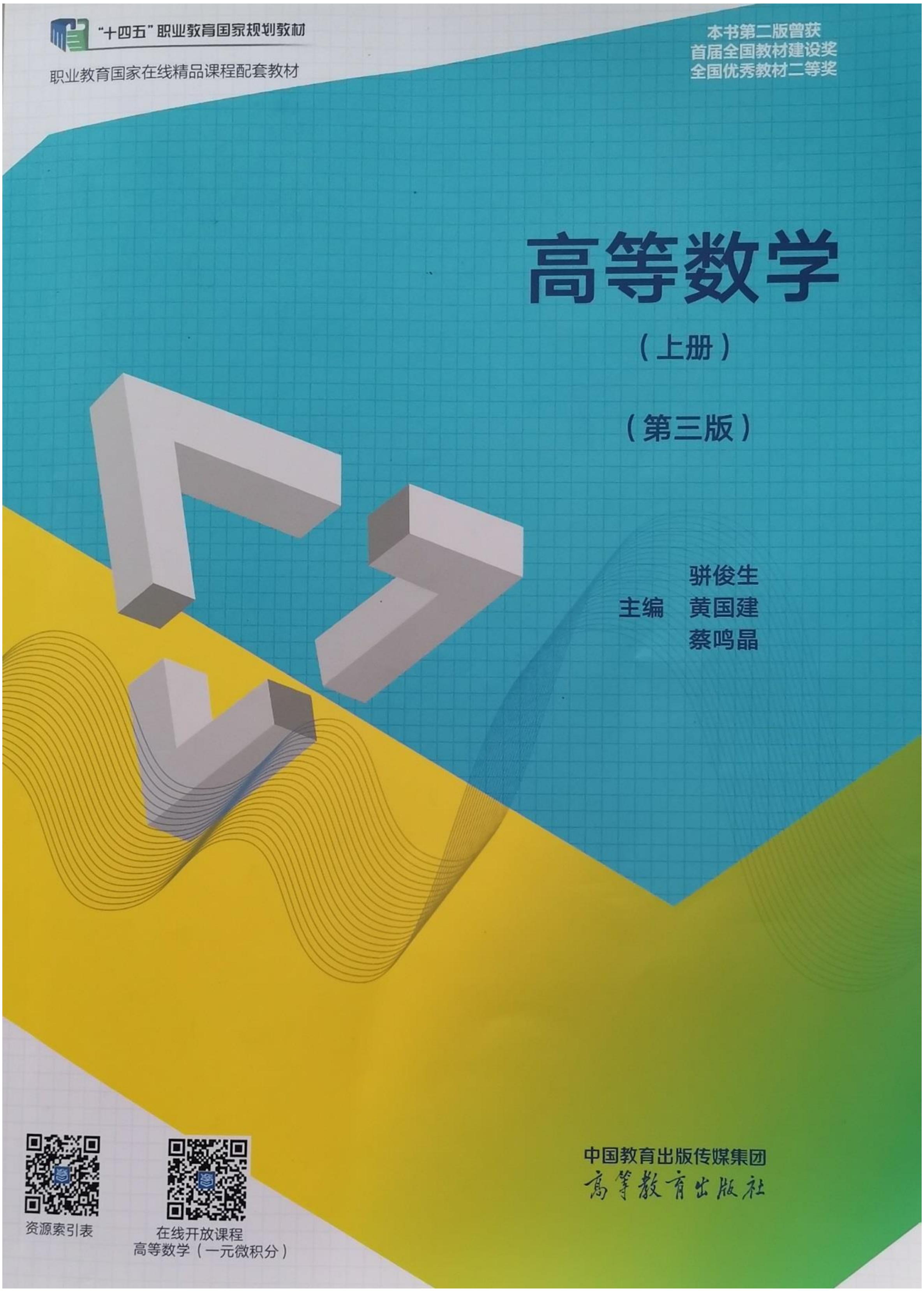
一、换元积分法

2.第二类换元积分法

教学重点： 第二类换元积分法，可自备教具及自备案例。

教材信息： 教材名称《高等数学》上册（第三版），中国教育出版传媒集团 高等教育出版社，2023.08 出版，骈俊生、黄国建、蔡鸣晶主编。

教材封面


"十四五"职业教育国家规划教材
职业教育国家在线精品课程配套教材
本书第二版曾获
首届全国教材建设奖
全国优秀教材二等奖
高等数学
（上册）
（第三版）
骈俊生
主编 黄国建
蔡鸣晶
资源索引表
在线开放课程
高等数学（一元微积分）
中国教育出版传媒集团
高等教育出版社

教学内容：第四章 不定积分 第二节 不定积分的计算

一、换元积分法 2.第二类换元积分法

例 12 求下列不定积分：

(1) $\int \sin^2 x\mathrm{d}x$. (2) $\int \cos^3 x\mathrm{d}x$. (3) $\int \sin 3x\cos 2x\mathrm{d}x$.

解 (1) $\int \sin^2 x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int(1-\cos 2x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[\int\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int\cos 2x\mathrm{d}(2x)\right]$

$$= \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\sin 2x\right) + C = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C.$$

(2) $\int \cos^3 x\mathrm{d}x = \int \cos^2 x\cdot\cos x\mathrm{d}x = \int\cos^2 x\mathrm{d}(\sin x)$

$$= \int(1-\sin^2 x)\mathrm{d}(\sin x) = \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x + C.$$

(3) $\int \sin 3x\cos 2x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int(\sin 5x + \sin x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int\sin 5x\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int\sin x\mathrm{d}x$

$$= \frac{1}{10}\int\sin 5x\mathrm{d}(5x) + \frac{1}{2}\int\sin x\mathrm{d}x = -\frac{1}{10}\cos 5x - \frac{1}{2}\cos x + C.$$

小贴士

这种方法可以推广到 $\int\sin^n mx\mathrm{d}x$ 和 $\int\cos^n mx\mathrm{d}x$，其中：当 n 为偶次方时方法同(1)，利用三角恒等式中的降次公式；n 为奇次方时方法同(2)，从奇次方中拆出一个 $\sin x$ 或 $\cos x$ 置后凑微分.(3)用到三角函数中的积化和差公式

$$\sin A\cos B = \frac{1}{2}[\sin(A+B)+\sin(A-B)].$$

2. 第二类换元积分法

以上用不定积分的第一类换元法求解了一些例题，但有些不定积分，如 $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}}(a\neq 0)$，$\int\frac{1}{1+\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x$ 等，就难以用凑微分法来积分.这些表达式中都有根式，在基本积分公式中，有根式的只有两个，要么把根式当作幂函数来积分，要么把根式当作 $\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$ 来凑微分.

如果遇到的题目中的根式都没法化到这两种情况，那意味着根式保留在被积函数中就没法积分了，所以只有想办法消去根式，这就是第二类换元法的基本思路.

请思考

$\int\cos^2 x\mathrm{d}x$，$\int\sin^3 x\mathrm{d}x$，$\int\sin^4 x\mathrm{d}x$ 如何求出？

定理 4.2.2 函数 $x=\varphi(t)$ 有连续的导数且 $\varphi'(t)\neq 0$，又 $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$ 有原函数，则

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t = F(t) + C = F[\varphi^{-1}(x)] + C.$$

这种方法叫第二类换元积分法.

使用第二类换元积分法的关键是恰当地选择变换函数 $x=\varphi(t)$.对于 $x=\varphi(t)$,要求其单调可导,$\varphi'(t)\neq 0$,且其反函数 $t=\varphi^{-1}(x)$ 存在.下面通过一些实例来说明.

例 13 求 $\int\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

解 为了消去根式,可令 $\sqrt{x}=t$,则 $x=t^2$,$\mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t$,于是

$$\begin{aligned}\int\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\mathrm{d}x&=\int\frac{t}{1+t}2t\mathrm{d}t=2\int\frac{t^2}{1+t}\mathrm{d}t=2\int\frac{(t^2-1)+1}{1+t}\mathrm{d}t\\&=2\int\left(t-1+\frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t=t^2-2t+2\ln|1+t|+C\\&=x-2\sqrt{x}+2\ln(1+\sqrt{x})+C.\end{aligned}$$

例 14 求 $\int\frac{\sqrt{x-1}}{x}\mathrm{d}x$.

解 为了消去根式,可令 $\sqrt{x-1}=t$,则 $x=t^2+1$,$\mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t$,于是

$$\begin{aligned}\int\frac{\sqrt{x-1}}{x}\mathrm{d}x&=\int\frac{2t^2}{t^2+1}\mathrm{d}t=2\int\frac{t^2+1-1}{t^2+1}\mathrm{d}t=2\int\left(1-\frac{1}{t^2+1}\right)\mathrm{d}t\\&=2(t-\arctan t)+C=2(\sqrt{x-1}-\arctan\sqrt{x-1})+C.\end{aligned}$$

由例 13 和例 14 可以看出:当被积函数中含有 $\sqrt[n]{ax+b}$ 时,可令 $\sqrt[n]{ax+b}=t$,消除根号,从而求得积分.通常称以上代换为**根式代换**.

第二类换
积分法—
根式代换

下面再讨论被积函数含有被开方因式为二次多项式的情况.如果也作根式代换,会达不到去掉根式的目的,因为求出反函数时仍含有二次根式.所以得想另外的办法去掉根式,这可以结合三角函数公式,通过适当换元将二次根式内函数化作某个表达式的完全平方,就可以消去根式了.

请思考

在 $\int\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}\mathrm{d}x$ 中,设 $t=$? 才能消除根式?

小贴士

此时联想到以下恒等式:$\sin^2 x+\cos^2 x=1$,$1+\tan^2 x=\sec^2 x$.

例 15 求 $\int\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x\ (a>0)$.

解 为了消除被积函数中的根式,可令 $x=a\sin t$,$t\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$,那么 $\sqrt{a^2-x^2}=\sqrt{a^2(1-\sin^2 t)}=a\cos t$,$\mathrm{d}x=a\cos t\mathrm{d}t$,于是

$$\begin{aligned}\int\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x&=\int a\cos t\cdot a\cos t\mathrm{d}t=a^2\int\cos^2 t\mathrm{d}t\\&=\frac{a^2}{2}\int(1+\cos 2t)\mathrm{d}t=\frac{a^2}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)+C\end{aligned}$$

$$=\frac{a^2}{2}(t+\sin t\cos t)+C.$$

为了把最后一式还原为 x 的表达式，可以根据 $\sin t=\frac{x}{a}\left(-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}\right)$，求 t 的其他三角函数值，由于它们的表达式在第一、四象限内相同，因此可利用 t 是锐角时作辅助直角三角形（图 4.2）来求，有

$t=\arcsin\frac{x}{a}$，$\cos t=\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}$，因此

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx \xlongequal{\text{回代}} \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+C.$$

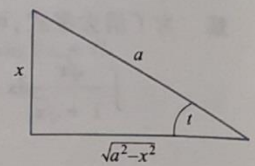


图 4.2

小贴士

作三角代换时，合理设置角度的范围很关键.角度所属范围的选择，一方面，要使得根式内函数开出来为恒正或恒负，以避免讨论正负的情形.另一方面，还要不改变原来自变量的取值范围.

例 16 求 $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}(a>0)$.

解 为了消除被积函数中的根式，可令 $x=a\tan t\left(-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}\right)$，那么 $\sqrt{x^2+a^2}=a\sec t$，$dx=a\sec^2 t\,dt$，于是

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=\int\frac{a\sec^2 t}{a\sec t}dt=\int\sec t\,dt$$
$$=\ln|\sec t+\tan t|+C_1.$$

根据 $\tan t=\frac{x}{a}$，作辅助直角三角形（图 4.3），有 $\sec t=\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a}$，因此

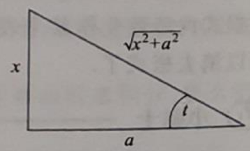


图 4.3

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a}+\frac{x}{a}\right|+C_1$$
$$=\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|+C\text{（其中 }C=C_1-\ln a\text{）}.$$

例 17 求 $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}(a>0)$.

解 为了消除被积函数中的根式，可令 $x=a\sec t\left(0<t<\frac{\pi}{2}\text{或 }\pi<t<\frac{3\pi}{2}\right)$，那么

$$\sqrt{x^2-a^2}=a\tan t,dx=a\sec t\tan t\,dt,$$

于是 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}}=\int \sec t\mathrm{d}t=\ln|\sec t+\tan t|+C_1$.根据 $\sec t=\frac{x}{a}$，作辅助直角三角形(图 4.4)，有 $\tan t=\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}$，因此

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}}=\ln\left|\frac{x}{a}+\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right|+C_1$$

$$=\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+C$$

(其中 $C=C_1-\ln a$).

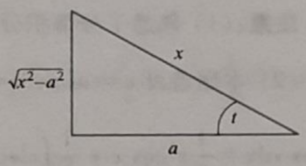


图 4.4

小贴士

一般地说，当被积函数中含有

(1) $\sqrt{a^2-x^2}$，可作代换 $x=a\sin t, t\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

(2) $\sqrt{x^2+a^2}$，可作代换 $x=a\tan t, t\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

(3) $\sqrt{x^2-a^2}$，可作代换 $x=a\sec t, t\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\pi,\frac{3}{2}\pi\right)$.

通常称以上代换为**三角代换**.

第二类换元积分法——三角代换

小点睛

化归思想：通过变量代换将无理函数转化为有理函数，再用相应的方法就比较容易求出结果.

二、分部积分法

前面介绍的换元积分法虽然可以解决许多积分问题，但有些积分，如 $\int x^2\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$，$\int x\sin x\mathrm{d}x$ 等用换元积分法也无能为力.即当被积函数是两种不同类型函数的乘积时，往往需要用下面所讲的分部积分法来解决.

设函数 $u=u(x)$，$v=v(x)$ 具有连续的导数，根据乘积微分公式有

$$\mathrm{d}(uv)=u\mathrm{d}v+v\mathrm{d}u, u\mathrm{d}v=\mathrm{d}(uv)-v\mathrm{d}u,$$

两边积分得

$$\int u\mathrm{d}v=uv-\int v\mathrm{d}u.$$

该公式称为**分部积分公式**.下面我们利用分部积分公式解决一些不定积分.

分部积分法

例 18 求 $\int x\cos x\mathrm{d}x$.